ÖRNEK 2.4.9

Aşağıdaki ikinci dereceden fark denklemiyle tanımlanmış sistemin, $n \geq 0$ için $y(n)$ cevabını bulunuz:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) \qquad (2.4.31)$$

Giriş dizisi

$$x(n) = 4^n u(n)$$

şeklindedir.

Çözüm. Örnek (2.4.5)'te bu sistem için türdeş fark denkleminin çözümü bulunmuştur. (2.4.22)'den

$$y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n \qquad (2.4.32)$$

bulunur. Eşitlik (2.4.31)'in özel çözümü *x(n)* biçiminde bir üstel fonksiyon olarak kabul edilir. Normalde

$$y_p(n) = K(4)^n u(n)$$

biçiminde bir çözüm varsayılabilir. Ancak görüyoruz ki $y_p(n)$ türdeş çözüme zaten dahil edilmiştir, yani bu özel çözüm işlevsizdir. Bunun yerine, özel çözümü türdeş çözümdeki terimlerden doğrusal olarak bağımsız olacak şekilde seçeriz. Aslında, bu duruma yaklaşımımız karakteristik denklemin katlı kökler içerdiği duruma benzer şekilde olmaktadır. O nedenle,

$$y_p(n) = Kn(4)^n u(n) \qquad (2.4.33)$$

olduğunu kabul ediyoruz. (2.4.33)'ü (2.4.31)'de yerine koyarsak

$$Kn(4)^n u(n) - 3K(n-1)(4)^{n-1}u(n-1) - 4K(n-2)(4)^{n-2}u(n-2) = (4)^n u(n) + 2(4)^{n-1}u(n-1)$$

elde edilir. K'yı belirlemek için, bu eşitliği herhangi $n \geq 2$ için değerlendirelim. n'nin bu şekilde seçimi terimlerinden hiç birisinin yok olmamasını sağlar. İşlemleri kolaylaştırmak için, $n = 2$ seçersek, bundan $K = \frac{6}{3}$ elde ederiz. Bu nedenle

$$y_p(n) = \frac{6}{5}n(4)^n u(n) \qquad (2.4.34)$$

olur. (2.4.32)'ye (2.4.34)'ü ekleyerek fark denkleminin toplam çözümünü elde ederiz:

$$y(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n, \qquad n \geq 0 \qquad (2.4.35)$$

Buradaki C_1 ve C_2 sabitleri başlangıç koşulunu sağlayacak şekilde bulunur. Bunun için, tekrar eşitlik (2.4.31)'e döneriz ve buradan

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2) + 1$$

$$y(1) = 3y(0) + 4y(-1) + 6$$

$$= 13y(-1) + 12y(-2) + 9$$

elde ederiz. Öte yandan, (2.4.35) $n = 0$ ve $n = 1$ için hesaplanırsa

$$y(0) = C_1 + C_2$$

$$y(1) = -C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5}$$

bulunur.

Şimdi iki eşitliğin arasındaki ilişkiyi kuralım ve C_1 ve C_2'yi elde edelim. Böyle yaparak, hem başlangıç koşulları $y(-1)$ ve $y(-2)$'ye (sıfır-giriş tepkisi) hem de sıfır-durum tepkisine bağlı tepkiyi bulmuş oluruz.

Sıfır-giriş tepkisi Örnek 2.4.5'te zaten çözülmüş olduğu için, $y(-1) = y(-2) = 0$ seçerek işlemleri kolaylaştırabiliriz. Böylece

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$-C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5} = 9$$

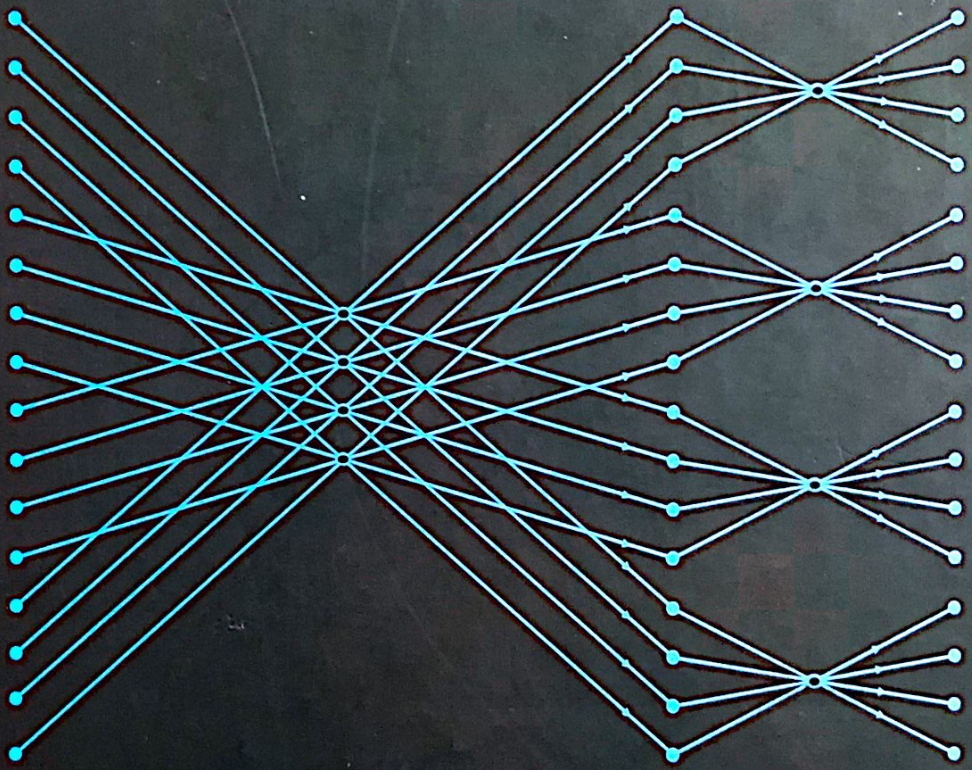
elde ederiz. Bu sebepten $C_1 = \frac{1}{25}$ ve $C_2 = \frac{26}{25}$ bulunur. Son olarak, $x(n) = (4)^n u(n)$ güdüm fonksiyonuna karşılık gelen sıfır-durum tepkisini

$$y_{zs}(n) = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n, \qquad n \geq 0 \tag{2.4.36}$$

şeklinde buluruz. Sistemin herhangi bir başlangıç koşuluna tepkisini içeren toplam çözümü (2.4.23) ve (2.4.36)'nın toplamıdır.

DIGITAL SIGNAL PROCESSING
Principles, Algorithms, and Applications
Fourth Edition

SAYISAL SİNYAL İŞLEME
İlkeler, Algoritmalar ve Uygulamalar
4. Baskıdan Çeviri



Dr. Özgül Salor Çeviri Editörü
Prof. Dr. Abdurrahman Karamancıoğlu
Doç. Dr. Nurhan Karaboğa
Yrd. Doç. Dr. Halis Altun
Yrd. Doç. Dr. Remzi Yıldırım

John G. Proakis
Dimitris G. Manolakis

nobel
YAYIN DAĞITIM